B Corrigé

Préambule :

L'épreuve se subdivise en deux exercices entièrement indépendants.

Le premier exercice, très intéressant - ce qui nous a poussé à sélectionner ce deuxième sujet de l'université de Caen -, concerne l'effet Meissner, et la supraconductivité. Après un rappel historique, et à l'aide de l'équation de London, il est d'abord demandé au candidat d'établir en régime statique l'équation donnant le champ magnétique à l'intérieur du supraconducteur. A l'aide de conditions de continuité, l'étudiant est ensuite amené à montrer que "l'effet Meissner consiste en l'expulsion du champ magnétique du volume du supraconducteur". Divers calculs sont alors proposés, en particulier relatifs au courant de surface. Un modèle plus réaliste, "en plaquette", est enfin proposé. Seul petit bémol à propos de ce sujet "supraconducteur" : les questions et leur découpage ne nous semblent pas toujours très clairs.

Le second exercice, classique, traite de la propagation dans le vide d'une onde plane progressive. La seule originalité concerne la polarisation de l'onde qui n'est pas rectiligne mais circulaire. Nous n'avons pas sélectionner d'autres exercices de ce type, et donc...

Mots clés : Supraconductivité, effet Meissner, équation de London, équations de Maxwell, continuité du champ magnétique, courant de surface, onde électromagnétique progressive, polarisation, densité d'énergie électromagnétique, vecteur de Poynting, principe de superposition.

---

1 Supraconductivité : Effet Meissner

1. Équations de Maxwell en régime statique.

Rappel :
Elles sont au nombre de quatre :

$$div\vec{D} = \rho_{ext} = 0,$$

$$div\vec{B} = 0,$$

$$r\vec{o}t\vec{E} = \vec{0},$$

et

$$r\vec{o}t\vec{H} = \vec{j}.$$

Le vecteur excitation électrique est symbolisé par $\vec{D}$, la densité volumique de charges extérieures par ρ_{ext}, et le vecteur excitation magnétique par $\vec{H}$ (ici, il vaut $\frac{\vec{B}}{\mu_0}$).

2. (a) $\vec{B}$ dans un supraconducteur vérifie $\Delta\vec{B}$ - $\frac{\vec{B}}{\lambda^2}$ = $\vec{0}$.
Nous écrivons :

$$\vec{rot}(\vec{rot}(\frac{\vec{B}}{\mu_0})) = \vec{grad}(div(\frac{\vec{B}}{\mu_0})) - \Delta((\frac{\vec{B}}{\mu_0})) = \vec{rot}\vec{j} = -\Lambda\vec{B}.$$

Comme $\vec{grad}(\text{div}(\frac{\vec{B}}{\mu_0})) = \vec{0}$ (deuxième équation de Maxwell rappelée plus haut), nous obtenons alors :

$$\Delta(\frac{\vec{B}}{\mu_0}) - \Lambda\vec{B} = \vec{0},$$

ou encore :

$$\Delta(\vec{B}) - \frac{\vec{B}}{\lambda^2} = \vec{0},$$

en posant

$$\lambda = \frac{1}{(\mu_0\Lambda)^{1/2}}.$$

Dimension de λ.
La dimension de ΔB est Tesla m^{-2}, qui est également celle de $\frac{B}{\lambda^2}$. Nous en déduisons celle de λ qui est alors celle d'une distance (exprimée en m).

(b) Solution du type $B_i = B_{i0}$ exp(-$\frac{z}{\lambda}$) à l'intérieur du supraconducteur.

Méthode :
Il s'agit de réinjecter cette solution dans l'équation $\Delta\vec{B}$ - $\frac{\vec{B}}{\lambda^2}$ = $\vec{0}$.

Vérifions la conformité de la solution proposée pour la coordonnée x, $B_x = B_{x0}$ exp(-$\frac{z}{\lambda}$), les 2 autres coordonnées seront vérifiées du même coup. Le premier terme vaut

$$\Delta B_x = \frac{\partial^2 B_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2} = \frac{B_x}{\lambda^2},$$

qui, retranché au deuxième terme -$\frac{B_x}{\lambda^2}$ donne bien zéro.

3. Dans le vide règne un champ extérieur $\vec{B}_{ext} = B_0\vec{u}_x+\beta\vec{u}_z$.

(a) Continuité du champ en z = 0.

Rappel :
Nous avons continuité de la composante normale :

$$\vec{n}_{ext}.(\vec{B}_{ext} - \vec{B}_{int}) = 0,$$

---

ce qui se réexprime par :

$$\vec{n}_{ext}.\vec{B}_{ext} = -\vec{u}_z.(B_0\vec{u}_x + beta\vec{u}_z) = -\beta$$

$$= \vec{n}_{ext}\vec{B}_{int} = -\vec{u}_z.\vec{B}_{int}.$$

Nous en déduisons immédiatement $B_{intz} = \beta$.
Autres composantes du champ magnétique intérieur B_{intx} et B_{inty}.
Nous obtenons simplement $B_{intx} = B_0 \exp(-\frac{z}{\lambda})$ et $B_{inty} = 0$.

(b) Champ magnétique intérieur $\vec{B}$ nécessairement tangent au supraconducteur.
L'expression $B_{intz} = \beta =$ constante est incompatible avec l'expression $B_{intz} = B_{z0} \exp(-\frac{z}{\lambda})$ démontrée précédemment, à moins d'avoir $\beta = 0$.
On en déduit qu'à l'intérieur du supraconducteur, le champ magnétique ne peut pas avoir de composante normale (suivant $\vec{u}_z$), et que si champ magnétique il y a, il ne peut être que tangent (suivant $\vec{u}_x$).
Par là-même et en vertu de la continuité de la composante normale, le champ extérieur $\vec{B}_{ext}$ ne peut être que tangent à l'interface, et donc les lignes de champ correspondantes.

(c) Commentaires.

Remarque :
Il y a manifestement un "effet de peau", avec une prodondeur de pénétration puisque Λ vaut 50 nm. Le champ magnétique n'est donc pas rigoureusement nul à l'intérieur du supraconducteur, bien qu'il le soit dans une part très importante de son volume. Il est plus correct de dire que "l'effet Meissner consiste en l'expulsion du champ magnétique du volume du supraconducteur".

---

4. (a) $\vec{j}$ dans le supraconducteur.
Nous utilisons :

$$\vec{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j}.$$

Le vecteur $\vec{rot}\vec{B}$ n'a qu'une composante, suivant y :

$$\vec{rot}\vec{B} = -\frac{B_0}{\lambda}\exp(-\frac{z}{\lambda})\vec{u}_y = \mu_0\vec{j}.$$

Nous en déduisons immédiatement $\vec{j}$:

$$\vec{j} = -\frac{B_0}{\mu_0\lambda}\exp(-\frac{z}{\lambda})\vec{u}_y.$$

(b) Calcul de $\vec{i}=\int_0^\infty \vec{j}(z)dz$.
Raisonnons sur le module :

$$i = \int_0^\infty j(z)dz = -\frac{B_0}{\mu_0\lambda}\int_0^\infty \exp(-\frac{z}{\lambda})dz = -\frac{B_0}{\mu_0}.$$

Le courant $\vec{i}$ vaut :

$$\vec{i} = -\frac{B_0}{\mu_0}\vec{u}_y.$$

Remarque :
Signification physique : il s'agit du courant de surface.

---

5. Plaquette de supraconducteur définie par -a < z < a.

   (a) Continuité du champ en z = ± a.

      i. En -a :

      $$-\vec{u}_z.(Kch(-\frac{a}{\lambda})\vec{u}_x) = -\vec{u}_z.B_0\vec{u}_x,$$

      ce qui donne

      $$B_0 = Kch(-\frac{a}{\lambda}) = Kch(\frac{a}{\lambda}).$$

      ii. En +a :

      $$\vec{u}_z.(Kch(\frac{a}{\lambda})\vec{u}_x) = \vec{u}_z.B_0\vec{u}_x,$$

      ce qui donne comme précédemment :

      $$B_0 = Kch(\frac{a}{\lambda}).$$

   On en déduit immédiatement K :

   $$K = \frac{B_0}{ch(\frac{a}{\lambda})}.$$

   Le champ magnétique intérieur au supraconducteur vaut finalement :

   $$\vec{B}_{int} = \frac{B_0}{ch(\frac{a}{\lambda})}ch(\frac{z}{\lambda})\vec{u}_x.$$

   (b) Tracé $\frac{B(z)}{B(a)}$ en fonction de $\frac{z}{a}$ ($\frac{a}{\lambda} = 10$).
   Le rapport $\frac{B(z)}{B(a)}$ peut se réécrire :

   $$\frac{B(z)}{B(a)} = \frac{ch(10\frac{z}{a})}{ch(10)}.$$

   Le tracé demandé est représenté ci-dessous.
   Largeur très supérieure à λ : modèle précédent pour z = -a + ϵ et z = a - ϵ ($0 < \epsilon \ll \lambda \ll$ a).

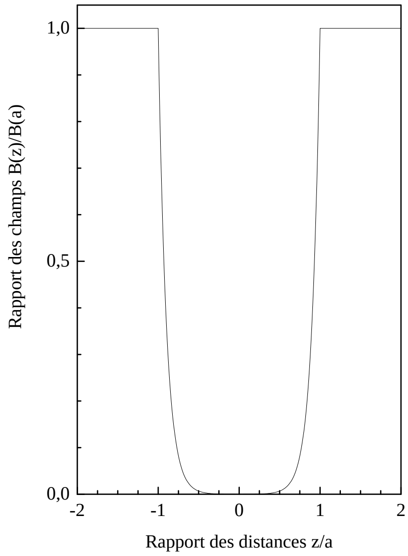

Figure 1:

i. z = -a + ϵ

Méthode :
Nous repartons de l'expression précédente, exprimée à l'aide de termes exponentiels :

$$\frac{B(z)}{B(a)} = \frac{ch(10\frac{z}{a})}{ch(10)} = \frac{\exp(10\frac{z}{a}) + \exp(-10\frac{z}{a})}{\exp(10) + \exp(-10)}$$
$$= \frac{\exp(-10 + 10\frac{\epsilon}{a}) + \exp(10 - 10\frac{\epsilon}{a})}{\exp(10) + \exp(-10)}$$
$$= \frac{\exp(-10)\exp(10\frac{\epsilon}{a}) + \exp(10)\exp(-10\frac{\epsilon}{a})}{\exp(10) + \exp(-10)}.$$

On néglige le terme exp(-10) devant exp(10) au dénominateur pour obtenir :

$$\frac{B(z)}{B(a)} \approx \exp(-20)\exp(10\frac{\epsilon}{a}) + \exp(-10\frac{\epsilon}{a}) \approx \exp(-10\frac{\epsilon}{a}) = \exp(-\frac{\epsilon}{\lambda}).$$

Remarque :
On retrouve bien le modèle précédent qui était très simplifié, avec B(a)=B_0.

---

ii. z = a - ϵ

De façon symétrique au cas précédent :

$$\frac{B(z)}{B(a)} = \frac{\exp(10 - 10\frac{\epsilon}{a}) + \exp(-10 + 10\frac{\epsilon}{a})}{\exp(10) + \exp(-10)}$$
$$= \frac{\exp(10)\exp(-10\frac{\epsilon}{a}) + \exp(-10)\exp(10\frac{\epsilon}{a})}{\exp(10) + \exp(-10)}.$$

On néglige à nouveau le même terme exp(-10) au dénominateur pour écrire finalement :

$$\frac{B(z)}{B(a)} \approx \exp(-10\frac{\epsilon}{a}) + \exp(-20)\exp(10\frac{\epsilon}{a}) \approx \exp(-10\frac{\epsilon}{a}) = \exp(-\frac{\epsilon}{\lambda}).$$

Le modèle précédent est à nouveau retrouvé.

2 Ondes électromagnétiques dans le vide

1. Planéité de l'onde progressive.
   Le champ électrique, dont l'expression mathématique est donnée dans l'énoncé, correspond bien à celui d'une onde plane progressive, dont le vecteur d'onde est orienté suivant la direction $\vec{u}_x$. En effet, en tout point du plan d'onde ($\vec{u}_y$,$\vec{u}_z$), l'amplitude du champ électrique est uniforme à un instant t donné.

2. Monochromaticité de l'onde.
   Cette onde, de pulsation $\omega = 2\pi\frac{c}{\lambda}$, est bien monochromatique de longueur d'onde λ.
   Amplitude et phase.
   L'amplitude est E_0 tandis que la phase vaut (ω(t-$\frac{x}{c}$)).

3. Champ magnétique $\vec{B}$ associé.
   Il se calcule à l'aide de la relation :

Rappel :

$$\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}.$$

Ceci donne :

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega}\left|\begin{array}{c} \frac{\omega}{c} \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{c} 0 \\ E_0\cos[\omega(t-\frac{x}{c})] \\ -E_0\sin[\omega(t-\frac{x}{c})] \end{array}\right.$$
$$= \left|\begin{array}{c} 0 \\ \frac{E_0}{c}\sin[\omega(t-\frac{x}{c})] \\ \frac{E_0}{c}\cos[\omega(t-\frac{x}{c})] \end{array}\right. .$$